数理解析研究所講究録
219巻 1974年 50-59

穴を開けた球面のアイソトピー群について

東教大 理　　金戸武司

§1 序

多様体Mの自己同相群$H(M)$のアイソトピー類のなす群$I(M)$について annulus theorem は基本的な役割をなす。Kirby [5]は4-次元を除き成立することを示した。このことから、$I(S^n) \approx Z_2$ $(n \neq 4)$になる。又 Gluck [3]は、$I(S^2 \times S^1) \approx Z_2 + Z_2 + Z_2$を示した。この報告では、$n$-次元球面$S^n$から$k$個の$n$-球を除いた多様体$S^n_k$について、$n=2$ かつ $k \leq 3$, $n=3$, $n \geqq 6$ ならば、$I(S^n_k) \approx P_k \times Z_2$ (P_kはk次対称群)となることを示す。

§2. 定義と準備.

R^nをn次元ユークリッド空間, $B^n := \{(x_i) \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1\}$を標準$n$-球, $S^{n-1} := \{(x_i) \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$を標準$(n-1)$-球面とする。それぞれに同相なものを、単に、$n$-球, $(n-1)$-球面という。

定義: $S^n \supset \hat{S}^{n-1}$ $(n-1)$-球面が任意の $x \in \hat{S}^{n-1}$ に対し、

S^nでの近傍Uが存在し，$(U, U\cap \hat{S}^{n-1})$と(R^n, R^{n-1})が対同相をなすとき，局所平坦という。$S^n \supset D^n$: n-球がその境界で局所平坦のとき，局所平坦という。

記号: $S^n \supset D^n_i$ $(i=1,2,\cdots,k)$を局所平坦な相交わらないn-球とする。$S^n - \bigcup_{i=1}^{k} D^n_i$の閉包を$S^n_k$で表わす。

注1: $n \geqq 1$ $(n \neq 4)$のとき，annulus theoremよりS^n_kは，D^n_iの取り方に依らず同相，以下，S^n_kとして，S^nの赤道に関するreflectionがS^n_kのreflectionを引き起こすように，$D^n_i := \{(x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}) / \sum_{j=1}^{n+1} x_j^2 = 1,\ (x_1 - \cos\frac{2\pi i}{k})^2 + (x_2 - \sin\frac{2\pi i}{k})^2 + \sum_{j=3}^{n+1} x_j^2 \leqq (\frac{\sin\frac{\pi}{k+1}}{2})^2\}$によって得られるものとする。

S^n_k上のすべての自己同相群$H(S^n_k)$は，コンパクト開位相に関して，合成を演算とし位相群をなす。$H_0(S^n_k) := \{h \in H(S^n_k) / h \sim 1\}$ (ここに1は恒等写像，「$\sim$」はアイソトピック)は，$H(S^n_k)$の開閉正規部分群をなす。以下，アイソトピー群$I^n_k := H(S^n_k)/H_0(S^n_k)$について考察する。

記号: ${}^+I^n_k := \{(h) / h \in H(S^n_k),\ h$: 向きを保つ$\}$ (ここに(h)はhを含むアイソトピー類)，${}^+_0I^n_k := \{(h) \in {}^+I^n_k \mid h(\hat{S}^{n-1}_i) = \hat{S}^{n-1}_i$ $(i=1,2,\cdots,k)$，但し$\partial S^n_k = \bigcup_{i=1}^{k} \hat{S}^{n-1}_i\}$。

$\iota: {}^+I^n_k \longrightarrow I^n_k$を包含写像，$\pi: I^n_k \longrightarrow I^n_k/{}^+I^n_k$を自然な準同型とする。

命題1. 短完全系列 $0 \to {}^{+}I_k^n \xrightarrow{\iota} I_k^n \xrightarrow{\pi} I_k^n/{}^{+}I_k^n \to 0$ は分解型で、$I_k^n \approx {}^{+}I_k^n \cdot Z_2$ (「・」半直積)となる。

証明. $I_k^n/{}^{+}I_k^n$ の生成元 ${}^{-}I_k^n$ に、$(r) \in I_k^n$ (ここに $r \in H(S_k^n)$ は、$r(x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, x_2, \cdots, x_n, -x_{n+1})$)を対応させる準同型 $\amalg : I_k^n/{}^{+}I_k^n \longrightarrow I_k^n$ は、$\pi \circ \amalg = 1$ 。

注2。(r) の生成する位数2の部分群 $\langle (r) \rangle$ が I_k^n で正規なら、上は直積に分解。

$\iota' : {}^{+}_{0}I_k^n \to {}^{+}I_k^n$ を包含写像、$\pi' : {}^{+}I_k^n \to {}^{+}I_k^n/{}^{+}_{0}I_k^n$ を自然な準同型とする。

命題2. 短完全系列 $0 \to {}^{+}_{0}I_k^n \xrightarrow{\iota'} {}^{+}I_k^n \xrightarrow{\pi'} {}^{+}I_k^n/{}^{+}_{0}I_k^n \to 0$ に於いて、${}^{+}I_k^n/{}^{+}_{0}I_k^n$ は k次対称群 P_k と同型。

証明。$H(S_k^n) \ni h_{ij}$ で向きを保ち、$\partial S_k^n \supset \hat{S}_l^{n-1}, \hat{S}_i^{n-1}, \hat{S}_j^{n-1}$ ($l \neq i$, $l \neq j$, $k \geq l \geq 1$)に対し、$h_{ij}(\hat{S}_i^{n-1}) = \hat{S}_j^{n-1}$, $h_{ij}(\hat{S}_j^{n-1}) = \hat{S}_i^{n-1}$, $h_{ij}(\hat{S}_l^{n-1}) = \hat{S}_l^{n-1}$ なるものが次のように構成できる。n-球 $D^n \subset S^n$ で、$\hat{S}_i^{n-1} \cup \hat{S}_j^{n-1}$ を内部に含み、他と交わらないものをとり、D^n 上の同相写像 $\widehat{h_{ij}}$ で $\widehat{h_{ij}} | \partial D^n = 1$, $\widehat{h_{ij}}(\hat{S}_i^{n-1}) = \hat{S}_j^{n-1}$, $\widehat{h_{ij}}(\hat{S}_j^{n-1}) = \hat{S}_i^{n-1}$ となるものを回転によってつくり、h_{ij} を $D^n \cap S_k^n$ 上で $\widehat{h_{ij}}$、他で1とすればよい。これにより、

$f : P_k \longrightarrow {}^{+}I_k^n/{}^{+}_{0}I_k^n$ を $f((i,j)) := [(h_{ij})]$ (ここに $[(h_{ij})]$ は (h_{ij}) を含む ${}^{+}I_k^n/{}^{+}_{0}I_k^n$ の類)、$f((i,j)(i',j')) := [(h_{ij})(h_{i'j'})]$ で定義すれば同型となる。

次の定理が基本的役割をなす。

定理 $n=2$ かつ $k\leqq 3$, $n=3$, $n\geqq 6$ のとき, ${}^{+}_{0}I^n_k=0$ 。

系 $n=2$ かつ $k\leqq 3$, $n=3$, $n\geqq 6$ のとき $I^n_k\approx P_k\times Z_2$ (直積)

証明. $I^n_k\ni{}^\forall(h)$ 対し, $(h)^{-1}(\gamma)(h)(\gamma)^{-1}=(h^{-1}\gamma h\gamma^{-1})\in{}^{+}_{0}I^n_k$, 従って定理より, 右辺 $=(1)$ すなわち, $(h)^{-1}(\gamma)(h)=(\gamma)$。故に $\langle(\gamma)\rangle$ は I^n_k の正規部分群。命題1の注1より, $I^n_k\approx{}^{+}I^n_k\times Z_2$ (直積)。命題2より ${}^{+}I^n_k\approx{}^{+}I^n_k/{}^{+}_{0}I^n_k\approx P_k$ 故に $I^n_k\approx P_k\times Z_2$。

§3. 定理の証明

次の結果が知られている。([5])

命題3 (annulus theorem)

$f, g: S^{n-1}\longrightarrow R^n$ が向きを保つ局所平坦な埋蔵で, $f(S^{n-1})$ が $g(S^{n-1})$ の囲む R^n の有界な領域に含まれるとき, $n\neq 4$ ならば, 埋蔵 $F: S^{n-1}\times[0,1]\to R^n$ で, $F(x,0)=f(x)$, $F(x,1)=g(x)$ (${}^\forall x\in S^{n-1}$) を満たすものが存在する。

命題4 (アイソトピー定理)

$f: S^n\to S^n$ を向きを保つ同相写像とすると $n\neq 4$ のとき, $f\sim 1$。(「$\sim$」は アイソトピック)

証明。命題3より次のように導かれる。$S^n\ni a$ (固定する) に対し, $\{a, f(a)\}\subset\mathring{D}^n$ なる n-球が存在する。D^n の斉性構造により, $f\sim f_1$ で $f_1(a)=a$ とできる。a の ε-球近傍 B^n_ε を十分小さくとれば, $f_1(B^n_\varepsilon)\subset B^n_\gamma$ となる a の γ-球近傍が

存在し，$f_1|\partial B^n_\varepsilon$ と $i:\partial B^n_r \to S^n$（包含写像）に命題3を用いて $F(S^{n-1}\times I[0,1])$ に沿って $f_1(\partial B^n_\varepsilon)$ を動かすことにより $f_1\sim f_2$ で $f_2|\partial B^n_\varepsilon = 1$ とできる。Alexanderアイソトピーにより，$f_2\sim 1$ となる。

注3。逆も成り立つ。（[1]）

命題5（アイソトピー拡張定理）

多様体M上の同相写像 $h:M\to M$ の ∂M 上のアイソトピー $h_t|\partial M$ は M上のアイソトピー h_t に拡張できる。

定理の証明。

${}^+_0I^n_k=0$ を示すには ${}^+_0I^n_k\ni{}^\forall(h)$ が $(h)=(1)$ すなわち，$H(S^n_k)\ni h$ が向きを保ち，$h(\hat{S}^{n-1}_i)=\hat{S}^{n-1}_i$ $(i=1,2,\cdots,k)$ ならば，$h\sim 1$ を示せばよい。命題4，5により $h|\partial S^n_k=1$ としてよい。以下3つの場合に分けて $h\sim 1$ を示す。

I] $n=2$ かつ $k\leqq 3$ の場合。

i) $k=1$ のとき，Alexanderアイソトピーにより $h\sim 1$.

ii) $k=2$ のとき，$\hat{S}^1_1$ を回転させれば，[3]の Th.(7.2)で成立。

iii) $k=3$ のとき，ii)での[3]の方法を，変形の途中で $\hat{S}^1_3$ にひっかからぬように注意して適用すればよい。

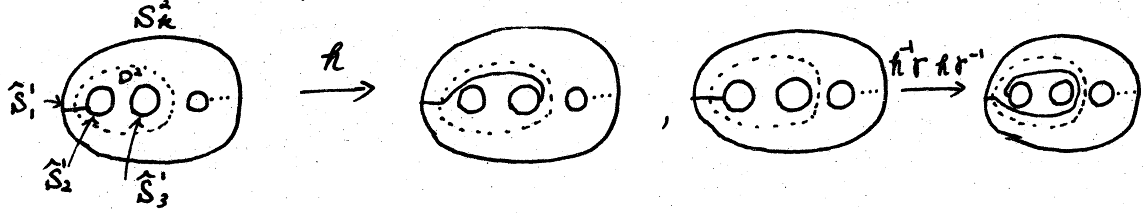
注4。$k\geqq 4$ では，Ш$(I^2_k/{}^+I^2_k)=\langle(\delta)\rangle$ が I^2_k で正規とならず，$I^2_k\neq{}^+I^2_k\times Z_2$（直積）。次はその例である。

$\partial S^2_k\supset\hat{S}^1_2,\ \hat{S}^1_3$ を含み，他と交わらぬ2-球 $D^2(\subset S^2)$ で，

$\gamma(D^2)=D^2$となるものをとり，$h|_{D^2}: D^2\to D^2$ を D^2の内部を180°回転させて得られる同相写像で，$h|D^2\,|\partial D^2=1$，$h|D^2(\hat{S}_2^1)=\hat{S}_3^1$，$h|D^2(\hat{S}_3^1)=\hat{S}_2^1$となるものとする．$h|S_k^2-D^2=1$により拡張して$h: S_k^2\to S_k^2$をうる。

$h^{-1}\gamma h\gamma^{-1}: (S_k^2, \partial S_k^2)\longrightarrow(S_k^2,\partial S_k^2)$は 1と対として

ホモトピックでないから，$(h)^{-1}(\gamma)(h)(\gamma)^{-1}\neq(1)$ 。(下図参照)



II］ $n=3$の場合

i) $k=1$のとき，I］の場合と同様。

ii) $k\geqq 2$のとき．自然数mを $k>m\geqq 1$とする。mについての帰納法を用いる。

$\hat{S}_i^2$と$\hat{S}_{i+1}^2$を結ぶ線分を$l_{i,i+1}$とし，その自明の管状近傍を $T_i: B^2\times[0,1]\longrightarrow S_k^3$ （$T_i(0\times[0,1])=l_{i,i+1}$，$T_i(B^2\times 0)\subset\hat{S}_i^2$，$T_i(B^2\times 1)\subset\hat{S}_{i+1}^2$）とする。$h\sim h_{m-1}$まで変形され，$h_{m-1}\,|\,\partial S_k^3\cup\{\bigcup_{j=1}^{m-1}T_j(B^2\times[0,1])\}=1$であるとする。[3]と同様の手法により，$\partial S_k^3\cup\{\bigcup_{j=1}^{m-1}T_j(B^2\times[0,1])\}$を止めたまま，$h_{m-1}\sim h'$で $h'(T_m(B^2\times[0,1]))=T_m(B^2\times[0,1])$とできる。$h'|T_m(\partial B^2\times[0,1]): T_m(\partial B^2\times[0,1])\to T_m(\partial B^2\times[0,1])$に前II］の$k=2$を適用（必要なら，$T_m(\partial B^2\times[0,1])$

⊂ $\hat{S}^2_m$ を回転させる。）し，命題5を用いて $T_m(\partial B^2\times 0)\subset \hat{S}^2_{m-1}$ を止めて，$h'\sim h''$ で $h''|\partial S^3_k \cup \{\bigcup_{j=1}^{m-1} T_j(B^2\times[0,1])\}\cup T_m(\partial B^2\times[0,1])$ $=1$ とできる。$h''|T_m(B^2\times[0,1])$ に Alexander アイソトピーを用いて，$h''\sim h_m$ をうる。$h_{k-1}|\partial S^3_k\cup\{\bigcup_{j=1}^{k-1}T_j(B^2\times[0,1])\}$ $=1$ だから，h_{k-1} は 3-球 $S^3_k-[\partial S^3_k\cup\{\bigcup_{j=1}^{k-1}T_j(B^2\times[0,1])\}]$ の境界上で，1。Alexander アイソトピーにより $h_{k-1}\sim 1$。

III］ $n\geq 6$ の場合

次の特殊な場合について考える。

補題1　$n\geq 2$ のとき，$h: S^n_2\to S^n_2$ が向きを保ち，$h(\hat{S}^{n-1}_i)=\hat{S}^{n-1}_i$ $(i=1,2)$ を満たす PL 同相写像ならば，$h \underset{PL}{\sim} 1$.　（「$\underset{PL}{\sim}$」：PL アイソトピック）

証明。n についての帰納法を用いる。

$n=2$ のとき，[3] の Th. (7.2) は，PL カテゴリーでも成り立つからよい。$n-1$ まで成り立つとする。PL カテゴリーで，命題3，従って命題4が $n\geq 1$ で，及び命題5が成り立つから，$h\underset{PL}{\sim}h'$ で $h'|\partial S^n_2=1$ とできる。h' は PL だから $h'(l_{1,2})$ は $\hat{S}^{n-1}_1$ と $\hat{S}^{n-1}_2$ を結ぶ折れ線。よって，$h'\underset{PL}{\sim}h''$ で，$h''|\partial S^n_2\cup l_{1,2}=1$ とできる。$l_{1,2}$ の自明の管状近傍 $T_1: B^{n-1}\times[0,1]\longrightarrow S^n_2$ を PL 写像でとると，$T_1(B^{n-1}\times[0,1])$，$h''(T_1(B^{n-1}\times[0,1]))$ は，共に $l_{1,2}$ の正則近傍でしかも，$T_1(B^{n-1}\times[0,1])\cap\partial S^n_2=h''(T_1(B^{n-1}\times[0,1]))\cap\partial S^n_2$ は，

$l_{1,2} \cap \partial S^n_2 = T_1(0\times\{0,1\})$ の ∂S^n_2 に於ける正則近傍。よって相対正則近傍の一意性により $h'' \underset{PL}{\sim} h'''$ で $h'''|\partial S^n_2 = 1$ かつ $h'''(T_1(B^{n-1}\times[0,1])) = T_1(B^{n-1}\times[0,1])$ とできる。$h'''|T(\partial B^{n-1}\times[0,1])$ に仮定を適用し，命題5と Alexander アイソトピーを用いて，$h'' \underset{PL}{\sim} 1$ 。

$n \geqq 6$ での一般の場合，次の Kirby [6] Th. 17 を用いる。

命題6. $q \geqq 5$ のとき，q 次元位相多様体 Q^q のコンパクト部分多様体 $Q_0 \supset \partial Q$ が PL 構造をもち，かつ Q への拡張が存在するならば，その拡張の Q_0 を止めたアイソトピー類は，$H^3(Q, Q_0, Z_2)$ と1対1に対応する。

定理の証明。 $h: S^n_k \longrightarrow S^n_k$ は $h|\partial S^n_k = 1$ だから，S^n_k の標準的な PL 構造 θ に対し，h によって誘導された PL 構造 $h^*\theta$ は，∂S^n_k 上で θ と一致する。従って命題6で，$Q = S^n_k$, $Q_0 := \partial S^n_k$ とすれば，$H^3(S^n_k, \partial S^n_k, Z_2) \approx H_{n-3}(S^n_k, Z_2) \approx 0$ だから $h \sim h'$ rel ∂S^n_k で h': PL とできる。II] の ii) と同様に，$l_{i,i+1}, T_i, h_i$ を定義する。自然数 m, $k > m \geqq 1$ について帰納法を用いる。

$h' \underset{PL}{\sim} h_{m-1}$ で h_{m-1}: PL かつ $h_{m-1}|\partial S^n_k \cup \{\bigcup_{i=1}^{m-1} T_i(B^{n-1}\times[0,1])\} = 1$ と変形できたとする。$h_{m-1}(l_{m,m+1})$ は折れ線だから，$h_{m-1} \underset{PL}{\sim} h''$ で $h''|\partial S^n_k \cup \{\bigcup_{i=1}^{m-1} T_i(B^{n-1}\times[0,1])\} \cup l_{m,m+1} = 1$

とできる。$T_m(B^{n-1}\times[0,1])$，$h''(T_m(B^{n-1}\times[0,1]))$は共に$l_{m,m+1}$の正則近傍。相対正則近傍の一意性より$h''\underset{PL}{\sim}h'''$で$h'''|\partial S^n_k\cup\{\bigcup_{i=1}^{m-1}T_i(B^{n-1}\times[0,1])\}\cup l_{m,m+1}=1$かつ$h'''(T_m(B^{n-1}\times[0,1]))=T_m(B^{n-1}\times[0,1])$とできる。$h'''|T_m(\partial B^{n-1}\times[0,1])$に補題1を適用し，命題5とAlexanderアイソトピーにより$h''\underset{PL}{\sim}h_m$。$h_{k-1}$にAlexanderアイソトピーを用いて，$h_{k-1}\underset{PL}{\sim}1$。

注5．PLカテゴリーでは，$n=4$，5でも成り立つ。

参考文献

[1] Brown. M. and Gluck. H.: *Stable structures on manifolds* I. Ann. of math. 79 (1964) 1–17.

[2] Edwards. R and Kirby. R: *Deformations of spaces of imbeddings*: Ann. of Math. 93 (1971) 63–88.

[3] Gluck. H: Embeddings of 2-spheres in 4-sphere. Trans. Amer. Math. Soc. 104 (1962), 308–333

[4] Hudson. J.F.P. *Piecewise Linear Topology* W.A. Benjamin. Inc. New.York. 1969.

[5] Kirby. R: Stable homeomorphisms and the annulus conjecture, Ann. of Math. 89 (1969) 575-582

[6] ———— Lectures on triangulations of manifolds. U.C.L.A. (Los Angels) (1969)